Zápočtový test z MA2, varianta A, **4. 12. 2017**

1. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$$

na množině

$$M : \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Extrém na M°:

$$f' = \big(2x,\ -2(y-1)\big) = (0,0)$$

nastává právě když $(x,y) = (0,1)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x,\ -2(y-1)\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$

$$1 - y = y\lambda \ .$$

Odsud máme, že buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 1$. Z první možnosti a rovnice kružnice máme body $(0, \pm 1)$. Z druhé, tj. $\lambda = 1$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a tudíž body $\Big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f\big(0,1\big) = 0, \qquad f\big(0,-1\big) = -4$$

$$f\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2} \ .$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ a minima v bodě $(0,-1)$.

2. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou): Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ a nechť je $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = q$. Pokud je $0 \leq q < 1$, řada konverguje a pokud je $q > 1$, řada diverguje.

V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+2}\right|}{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} |x| = |x|$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

Součet: Řadu rozepíšeme. Pro $|x| < 1$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)$$

kde jednotlivé řady sečteme takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} \ .$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \frac{1}{1-x}\, \mathrm{d}x = -\ln(1-x) + C \ .$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} - x\ln(1-x)$$

pro $|x| < 1$. (Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).